نفرض الحالة إذا كانت $[e_1, e_2] = \mu e_2$ فيه أن A ليس عديم القوى

الحالة الثانية : $[e_1, e_2] = \lambda e_1 + \mu e_2$ حيث $\lambda, \mu \in F$ عناصر غير صفرية

$$Z \in C^2A = [A, CA] = [A, A]$$

ليكن عندئذ $x, y \in A$ بحيث $Z = [x, y]$

$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 \qquad \alpha_1, \alpha_2 \in F$

$y = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 \qquad \beta_1, \beta_2 \in F$

$$Z = [x, y] = \alpha_1 \beta_2 [e_1, e_2] + \alpha_2 \beta_1 [e_2, e_1]$$

$$= \underbrace{(\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)}_{\gamma \in F} [e_1, e_2]$$

$$= \underbrace{\gamma \lambda}_{\in F} e_1 + \underbrace{\gamma \mu}_{\in F} e_2$$

ومنه يتبين أن المجموعة $\{e_1, e_2\}$ تولد جبر لي الجزئي C^2A وبما أن المجموعة $\{e_1, e_2\}$ مستقلة خطياً في $\{e_1, e_2\}$ قاعدة للفضاء الجزئي C^2A وبالتالي $C^2A = A \neq 0$

ملاحظة : إذا كان فضاءان جزئيان من فضاء متجهي منتهي البعد متساويين في البعد وأحدهما محتوى في الآخر يكونان متساويين

$$C^3A = [A, C^2A] = [A, CA] = C^2A = A \neq 0$$

إن

باستخدام الاستقراء نجد أنه لكل عدد صحيح موجب $k \geq 1$ فإن $C^kA = A \neq 0$ ومنه فإن A ليس عديم القوى.

مبرهنة :

لتكن $f: A \to A$ تشاكل جبور لي على الحلقة R عندئذٍ

① لأجل أي مثاليين I, J في A فإن

$$f([I,J]) = [f(I), f(J)]$$

② لأجل كل $k \in N$ فإن

$$f(C^k A) = C^k f(A)$$

البرهان :

① لتكن $x \in f([I,J])$ $x = f(y)$

$b \in J$ $a \in I$ $y \in [I,J]$ $y = [a,b]$

$$x = f(y) = f([a,b]) = [f(a), f(b)] \in [f(I), f(J)]$$

$$\Rightarrow f([I,J]) \subseteq [f(I), f(J)]$$

$\forall z \in [f(I), f(J)]$

عندئذٍ $z = [x_0, y_0]$ حيث $x_0 \in f(I)$ و $y_0 \in f(J)$

يوجد $a_0 \in I$ و $b_0 \in J$ حيث $x_0 = f(a_0)$ ، $y_0 = f(b_0)$

$$z = [x_0, y_0] = [f(a_0), f(b_0)] = f([a_0, b_0]) \in f([I,J])$$

$$\Rightarrow [f(I), f(J)] \subseteq f([I,J])$$

ومن الاحتوائين ينتج المساواة

نبرهن بالاستقراء حسب k

$k=1$

$$f(CA) = f(A) = Cf(A)$$

$k=2$

$$f(C^2A) = f([A, CA]) = f([A, A]) = [f(A), f(A)]$$

$$= [f(A), Cf(A)] = C^2 f(A)$$

~~f(A)~~

نفرض أن العلاقة صحيحة لأجل n

$$f(C^nA) = C^n f(A)$$

$$f(C^{n+1}A) = f([A, C^nA]) = [f(A), f(C^nA)]$$

$$= [f(A), C^n f(A)] = C^{n+1} f(A)$$

إذا كانت A عديم القوى فإن $f(A)$ عديم القوى

نتيجة :

ليكن $f: A \longrightarrow A'$ تشاكل جبور لي :

إذا كانت A عديم القوى فإن $\operatorname{Im}(f)$ عديم القوى

البرهان :

لنفرض أن A عديم القوى عندئذ يوجد $k \in N$ بحيث $C^kA = 0$

ومنه

$$C^k \operatorname{Im}(f) = C^k f(A) = f(C^kA) = f(0) = 0$$

ومنه $\operatorname{Im} f$ عديم القوى

مبرهنة :

ليكن A جبر لي عديم القوى عندئذ :

1. كل مشاكل في A عديم القوى
2. كل جبر لي جزئي في A عديم القوى

البرهان :

نفرض أن A عديم القوى عندئذ يوجد $k \in \mathbb{N}$ بحيث $C^k A = 0$

① ليكن I مثالي في A عندئذ

$$C^k I \subseteq C^k A = 0 \Rightarrow C^k I = 0$$

إذن I عديم القوى

② ليكن B جبر لي جزئي في A عندئذ

$$C^k B \subseteq C^k A$$

بالاستقراء حسب k

$k=1$: $\cancel{CB \subseteq CA}$ $CB = B \subseteq A = CA$

$k=2$:

$$C^2 B = [B, CB] \subseteq [A, CA] = C^2 A$$

نفرض أن العلاقة صحيحة من أجل n

$$C^n B \subseteq C^n A$$

لنثبت صحة العلاقة من أجل $n+1$

$$C^{n+1} B = [B, C^n B] \subseteq [A, C^n A] = C^{n+1} A$$

ومنه لأجل k فإن

$$C^k B \subseteq C^k A = 0$$

ومنه $C^k B = 0$ ومنه B عديم القوى

نتيجة:

ليكن A جبر لي عديم القوى عندئذ لأجل المثالي I في A فإن كلاً من I و A/I عديم القوى

البرهان:

ينتج مباشرة من المبرهنة السابقة والتي قبلها

مبرهنة:

ليكن A جبر لي فوق الحلقة R عندئذ لأجل كل $n,m \in N$ فإن

$$C^{n+1}(C^mA) \subseteq C^{n+m}A$$

البرهان:

لدينا لأجل كل $m \in N$ فإن C^mA مثالي في A.

بالاستقراء حسب n

$n=0$

$$C^0(C^mA) = C^mA$$

$n=1$

$$C^2(C^mA) = [C^mA, C(C^mA)] \subseteq [A, C^mA] = C^{m+1}A$$

لنفرض أن:

$$C^{k+1}(C^mA) \subseteq C^{m+k}A$$

$$C^{k+2}(C^mA) = [C^mA, C^{k+1}(C^mA)] \subseteq [A, C^{m+k}A] = C^{m+k+1}A$$

مبرهنة:

ليكن A جبر لي فوق الحلقة R و I مثالي في A عندئذ الشروط الآتية متكافئة

1. A عديم القوى
2. كل من I و A/I عديم القوى

البرهان:

(1)⇐(2) واضح اثبت سابقاً

(2)⇐(1)

لنفرض أن كل من I و A/I عديم القوى عندئذ يوجد $n,m \in N$ بحيث $C^nI=0$

$$C^m(A/I)=\bar{I}$$

صفر A/I

لنبرهن أولاً أنه لكل $k \in N$ فإن

$$C^k(A+I) = (C^kA) + I$$

من أجل $k=1$

$$C(A+I) = A+I = CA+I$$

$k=2$

$$C^2(A+I) = [A+I, C(A+I)] = [A+I, A+I]$$

$$= [A, A] + I = [A, CA] + I = (C^2A) + I$$

لنفرض أن

$$C^k(A+I) = (C^kA) + I$$

عندئذ

$$C^{k+1}(A+I) = [A+I, C^k(A+I)] = [A+I, (C^kA)+I]$$

$$= [A, C^kA] + I = (C^{k+1}A) + I$$

$$C^m(A/I) = C^m(A+I) = (C^mA) + I = I$$

ومنه

$$C^mA \subseteq I$$

$$C^{n+1}(C^mA) \subseteq C^{n+1}I = [I, C^nI] = 0$$

$$C^{n+m}A = 0$$

تمرين:

لتكن A جبر لي فوق الحلقة R، ولنفرض أنه لأجل كل $x, y \in A$

$$[[x,y],x] = 0$$

أثبت أنه لأجل كل $x, y, z \in A$ فإن

$$3[[x,y],z] = 0$$

الحل:

لتكن $x, y, z \in A$

$$\cancel{[[x,y],z]}\ [[x, y+z], y+z] = 0$$

$$[[x, y+z], y] + [[x, y+z], z] = 0$$

$$[[x,y]+[x,z], y] + [[x,y]+[x,z], z] = 0$$

$$\underbrace{[[x,y],y]}_{=0} + [[x,z],y] + [[x,y],z] + \underbrace{[[x,z],z]}_{=0} = 0$$

حسب الفرض

$$-[[x,z],y] = [[x,y],z] \quad \text{--- (1)}$$

أيضاً لدينا

$$[[y, x+z], x+z] = 0$$

حسب الفرض

$$\cancel{[[y,x]+[y,z], x] + [[y,x],}$$

$$[[y, x+z], x] + [[y, x+z], z] = 0$$

$$= [[y,x]+[y,z], x] + [[y,x]+[y,z], z] = 0$$

$$= [[y,x],x] + [[y,z],x] + [[y,x],z] + [[y,z],z] = 0$$

$$\Rightarrow [[y,z],x] + \underbrace{[[y,x],z]}_{= -[[x,y],z]} = 0 \quad \text{--- (2)}$$

نجمع ① مع ② نجد أن

$$[[x,z],y]+[[y,z],x]=0 \quad \text{③}$$

$$[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0$$

$$=[[y,z],x]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]$$

نعوض

$$[[x,z],y]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0$$

$$2[[x,z],y]+[z,[x,y]]=0 \quad \text{④}$$

من ① نجد أن

$$[z,[x,y]]=[[x,y],y]$$

نعوض في ④ نجد

$$3[[x,z],y]=0$$

$$3[z,[x,y]]+3[[x,z],y]=0$$

$$\underbrace{-3[[x,y],z]}=0$$

$$\Rightarrow 3[[x,y],z]$$

انتهت المحاضرة